Journal *of* Singularities
Volume 9 (2014), 50-55

Proc. of Algebraic Methods in Geometry, Guanajuato, 2011
DOI: 10.5427/jsing.2014.9d

FORMES LOGARITHMIQUES ET FEUILLETAGES NON DICRITIQUES

DOMINIQUE CERVEAU

À Xavier Gomez Mont
jeune mathématicien à
l'humour inclassable

Abstract. Given an algebraic codimension 1 foliation $\mathcal{F}$ on the projective space $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, under reasonable conditions on the nature of the singular set, one has that the degree of any invariant variety is at most $d+2$, where d is the degree of $\mathcal{F}$ (Carnicer [Car94], Cerveau-Lins-Neto [CLN91]). In this work we study the extreme case where the degree of the foliation attains its upper bound $d+2$, so completing results by Brunella [Bru97, CLN91].

Résumé. Pour un feuilletage algébrique $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, sous des conditions raisonnables portant sur la nature des singularités, le degré des hypersurfaces algébriques invariantes est majoré par $d+2$ où d est le degré de $\mathcal{F}$ (Carnicer [Car94], Cerveau-Lins-Neto [CLN91]). On s'intéresse ici au cas extrémal où le degré d'une telle hypersurface est précisément $d+2$ complétant en celà des résultats de Brunella [Bru97, CLN91].

1. Introduction

Soit Xune variété complexe ; si ω est une 1-forme différentielle méromorphe sur X on note $D = \mathrm{Pol}\,\omega$ son diviseur de pôles. On dit que ω est une forme logarithmique si ω et $d\omega$ sont à pôles simples le long de D. On sait qu'une 1-forme holomorphe sur une variété projective, et plus généralement sur une variété kählérienne, est fermée. C'est une conséquence de la formule de Stokes. Le résultat qui suit généralise ce fait ; il est du à P. Deligne :

Théorème 1.1 ([Del71]). *Soient X une variété projective complexe et ω une 1-forme logarithmique à pôles le long du diviseur D. Si les singularités de D sont des croisements ordinaires, la forme ω est fermée.*

On peut en fait alléger les hypothèses puisqu'une 1-forme méromorphe sur X est fermée dès qu'elle l'est en restriction à toute section hyperplane générale de dimension au moins 2. De sorte qu'il suffit de supposer que les singularités de D sont des croisements ordinaires en dehors d'un ensemble de codimension 3 de X. En un certain sens le Théorème 1.1 est de nature 2-dimensionnelle.

Comme l'ont remarqué plusieurs auteurs, ce résultat est directement lié au problème de l'estimation du degré des hypersurfaces invariantes des feuilletages de codimension 1 sur les variétés projectives. Les premiers résultats en ce sens sont dus à Carnicer [Car94] et Cerveau-Lins Neto [CLN91] dans le cadre des feuilletages algébriques du plan. Le théorème de Carnicer nécessite des hypothèses sur la nature des points singuliers du feuilletage :

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34M45, 37F75.
Key words and phrases. logarithmic meromorphic forms, holomorphic foliations.

Théorème 1.2 ([Car94]). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de degré d, de codimension 1 sur l'espace projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. On suppose que $\mathcal{F}$ possède une courbe algébrique invariante S de degré m. Si les points singuliers de $\mathcal{F}$ situés sur S sont non dicritiques alors $m \leq d+2$.*

À l'inverse dans ce qui suit les hypothèses portent sur les points singuliers de S et non sur ceux de $\mathcal{F}$; rappelons qu'une hypersurface D d'une variété M est dite à **croisements ordinaires ou normaux** si en chaque point m elle est localement décrite par l'annulation d'un monome $x_1 \dots x_p = 0$ où $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de coordonnées locales en m et $p = p(m) < n$.

Théorème 1.3 ([CLN91]). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de degré d du plan $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ possédant une courbe algébrique invariante S de degré m. Si les singularités de S sont des croisements ordinaires alors $m \leq d+2$. Lorsque l'égalité est réalisée, $m = d+2$, le feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par une forme fermée logarithmique.*

C'est la dernière partie de l'énoncé qui est directement reliée à celui de Deligne. Le Théorème 1.3 se généralise stricto sensu aux feuilletages de codimension 1 sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ayant une hypersurface invariante à croisements ordinaires. Mieux Brunella et Mendès établissent dans [BM00] un résultat plus général concernant les champs d'hyperplans (à priori non nécessairement intégrables) ayant encore une hypersurface à croisements normaux et ce sur les variétés projectives ayant $\mathbb{Z}$ comme groupe de Picard.

Dans cet article on précise le Théorème 1.2 dans le cas extrémal où l'inégalité est une égalité : $m = d+2$; pour celà on relie les concepts de non dicriticité et de formes logarithmiques (Propositions 2.1, 2.2, 2.4). Dans [Bru97, Proposition 10] Brunella présente un résultat similaire en utilisant des arguments d'indice de champs de vecteurs.

Théorème 1.4. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de degré d sur l'espace projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ possédant une courbe algébrique invariante S de degré précisément $d+2$. Si les points singuliers de $\mathcal{F}$ sur S sont non dicritiques, alors $\mathcal{F}$ est donné par une forme fermée logarithmique à pôles le long de S.*

On adapte ensuite cet énoncé aux dimensions supérieures et on donne quelques applications.

2. Formes logarithmiques et résolution des singularités

Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage singulier à l'origine de $\mathbb{C}^2$; on note $\omega = A\,dx + B\,dy$ un germe de 1-forme à singularité isolée en 0 définissant $\mathcal{F}$. Un tel ω est défini à unité multiplicative près. Par définition la **multiplicité algébrique** ou l'**ordre de $\mathcal{F}$ en** 0 est l'entier

$$\nu(\mathcal{F}) = \nu(\omega) = \inf(\nu(A), \nu(B))$$

où $\nu(A)$ et $\nu(B)$ désignent les ordres des fonctions holomorphes A et B en 0. Soit S un germe de courbe d'équation réduite $f = 0$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$. On dit que S est une **séparatrice** ou une **courbe invariante** de $\mathcal{F}$ si $S \setminus \{0\}$ est une feuille (au sens ordinaire) du feuilletage régulier $\mathcal{F}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\},0}$. Ceci se traduit en termes algébriques par : la 2-forme $\omega \wedge df$ est divisible par f, *i.e.* s'annule identiquement sur S.

Le germe de feuilletage $\mathcal{F}$ est dit **non dicritique** s'il ne possède qu'un nombre fini de séparatrices. Il en possède d'ailleurs au moins une d'après un énoncé célèbre de Camacho et Sad [CS82]. Lorsque $\mathcal{F}$ possède une infinité de séparatrices il est donc dit **dicritique**. Cette notion de dicriticité s'interprète en termes de réduction des singularités. Soit $\pi \colon \widetilde{\mathbb{C}^2} \to (\mathbb{C}^2, 0)$ la réduction des singularités de $\mathcal{F}$; alors $\mathcal{F}$ est non dicritique si et seulement si chaque composante du diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(0)$ est invariante par le feuilletage transformé strict $\pi^{-1}(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ par π. La notion de forme logarithmique se localise sans problème : le germe de 1-forme méromorphe Ω à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est **logarithmique** si Ω et $d\Omega$ sont à pôles simples. L'énoncé qui suit est élémentaire :

Proposition 2.1. *Soient $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par la 1-forme holomorphe ω et S une courbe invariante (pas nécessairement irréductible) de $\mathcal{F}$, d'équation réduite $f = 0$. Alors la forme méromorphe $\Omega = \omega/f$ est logarithmique.*

Démonstration. Puisque f est réduite Ω est à pôles simples. Maintenant $d\left(\frac{\Omega}{f}\right) = \frac{d\omega}{f} + \frac{\omega\wedge df}{f^2}$ est aussi à pôles simples puisque $\omega \wedge df$ est divisible par f. □

Le fait pour une 1-forme d'être logarithmique n'est pas "invariant" par éclatement. Par exemple la 1-forme $\Omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^4+y^4}$ est logarithmique, mais si on éclate l'origine par la transformation quadratique

$$\sigma\colon (x,t) \to (x,tx)$$

alors $\sigma^*\Omega = \frac{dt}{x^2(1+t^4)}$ est à pôle double le long du diviseur exceptionnel $x = 0$. C'est en fait un avatar de la dicriticité du feuilletage radial associé à $x\,dy - y\,dx$.

Par contre dans le cas non dicritique on a la :

Proposition 2.2. *Soient $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage non dicritique et S une courbe invariante par $\mathcal{F}$. Soient $f = 0$ une équation réduite de S et ω une 1-forme holomorphe définissant $\mathcal{F}$. Si σ est l'application d'éclatement de l'origine, alors la 1-forme méromorphe $\sigma^*\left(\frac{\omega}{f}\right)$ est logarithmique.*

Démonstration. Elle repose sur l'inégalité suivante [CLNS84] établie dans le cas non dicritique précisément : $\nu(f) \leq \nu(\omega) + 1$. La proposition est alors une simple vérification que l'on effectue par exemple dans la carte (x,t) où $\sigma(x,t) = (x,tx)$. On a :

$$\sigma^*\left(\frac{\omega}{f}\right) = \frac{x^{\nu(\omega)}\widetilde{\omega}}{x^{\nu(f)}\widetilde{f}}$$

avec $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{f}$ holomorphes. L'inégalité $\nu(f) \leq \nu(\omega)+1$ implique que $\sigma^*(\frac{\omega}{f})$est au pire à pôle simple le long de $x = 0$; le comportement de $\sigma^*\left(\frac{\omega}{f}\right)$ le long de $\widetilde{f} = 0$ est bien entendu le même que celui de ω le long de $f = 0$. Comme dans le cas non dicritique le diviseur exceptionnel $x = 0$ est invariant par le feuilletage $\sigma^*\mathcal{F}$ défini par $\widetilde{\omega}$, la 2-forme $d\left(\sigma^*\left(\frac{\omega}{f}\right)\right)$ est aussi à pôles au pire simples. □

Remarque 2.3. Il se peut, et c'est le cas si $\nu(f) \leq \nu(\omega)$, que $\sigma^*(\frac{\omega}{f})$ n'ait pas de pôle le long du diviseur $x = 0$.

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{F}$un germe de feuilletage non dicritique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ donné par la 1-forme ω. Soit $S = (f = 0)$ une courbe invariante par $\mathcal{F}$, avec f réduite. Soit $\pi\colon \widetilde{\mathbb{C}}^2 \to (\mathbb{C}^2, 0)$ la résolution des singularités de $\mathcal{F}$. Alors la 1-forme $\pi^*\left(\frac{\omega}{f}\right)$ méromorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ est logarithmique.*

Démonstration. Comme l'application π est une composition finie d'éclatements et que la notion de non dicriticité compatible aux éclatements, c'est une application directe de la Proposition 2.2. □

3. Démonstration du théorème 1.4

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donné en coordonnées homogènes $(z_0 : z_1 : z_2)$ par une 1-forme

$$\omega = A_0dz_0 + A_1dz_1 + A_2dz_2$$

où les A_i sont des polynômes homogènes de degré $d+1$, $\mathrm{pgcd}\,(A_0, A_1, A_2) = 1$ satisfaisant l'identité d'Euler :

$$\sum z_iA_i = 0.$$

La courbe invariante S est elle donnée par un polynôme homogène réduit f de degré $d+2$. La 1-forme méromorphe $\frac{\omega}{f}$ est donc invariante par les homothéties $z \mapsto t.z$. En utilisant l'identité d'Euler on constate qu'elle définit une 1-forme méromorphe Ω sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ à pôles simples le long de S. Comme S est invariante par $\mathcal{F}$ la forme Ω est donc logarithmique à pôles le long de S. On considère la réduction des singularités

$$\pi \colon \widetilde{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

du feuilletage $\mathcal{F}$. Comme en chaque point singulier $p \in S$ le feuilletage $\mathcal{F}_{,p}$ est non dicritique on peut appliquer la Proposition 2.4 ; ainsi $\pi^*\Omega$ est logarithmique sur $\widetilde{\mathbb{P}^2}_{\mathbb{C}}$. Son diviseur de pôles est contenu dans le transformé total $\pi^{-1}(S)$ de S par π (c'est l'union des diviseurs exceptionnels et de la transformée stricte de S). Comme $\pi^{-1}(S)$ est à croisements ordinaires, les pôles de $\pi^*(\Omega)$ le sont aussi et le théorème de Deligne affirme que $\pi^*\Omega$ est fermée ; par suite Ω aussi.

□

4. Applications et généralisation

Comme l'aura noté le lecteur on obtient de manière analogue et directe le :

Théorème 4.1. *Soient X une surface projective et ω une 1-forme logarithmique sur X. Si les singularités du feuilletage associé à ω situées sur le diviseur des pôles de ω sont non dicritiques, alors la forme ω est fermée.*

En fait le résultat précédent se généralise en toute dimension :

Théorème 4.2. *Soient $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une variété projective et ω une 1-forme logarithmique sur X. On suppose que dans une famille générique de sections linéaires de dimension $n - \dim X + 2$ les hypothèses du Théorème 4.1 sont réalisées. Alors la forme ω est fermée.*

Démonstration. Elle résulte du fait qu'une 1-forme méromorphe est fermée si et seulement si elle l'est dans une famille générique de sections comme ci-dessus. □

Dans l'esprit du Théorème 4.2 nous avons le :

Corollaire 4.3. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension 1 sur l'espace $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, n \geq 2$. Si dans une section 2-plane générale $i : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ le feuilletage restreint $i^*\mathcal{F}$ satisfait les hypothèses du Théorème 4.1 alors $\mathcal{F}$ est défini par une forme fermée logarithmique. En particulier $\mathcal{F}$ possède une hypersurface invariante de degré* $\deg \mathcal{F} +\ 2$.

Démonstration. Un feuilletage de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ défini dans une section plane générique par une 1-forme méromorphe fermée est aussi défini par une telle forme fermée. On trouve ce résultat par exemple dans [CM82]. □

5. Compléments

Considérons sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ le feuilletage $\mathcal{F}$ donné en carte affine (z_1, z_2) par la 1-forme :

$$\omega = z_1 dz_2 - z_2 dz_1 + z_1 z_2 (z_2 - z_1) \left(\alpha \frac{dz_1}{z_1} + \beta \frac{dz_2}{z_2} + \gamma \frac{d(z_2 - z_1)}{z_2 - z_1} \right)$$

où les α, β, γ sont des constantes complexes.

C'est un feuilletage de degré 2, ayant une singularité dicritique en l'origine. Il possède les droites invariantes

$$z_1 = 0, \qquad z_2 = 0, \qquad z_1 = z_2$$

et la droite à l'infini (tout du moins lorsque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$) et par conséquent une séparatrice réduite de degré 4. On démontre facilement par des arguments holonomiques que pour α, β, γ

génériques $\mathcal{F}$ n'est pas donné par une 1-forme fermée. On note aussi que $\frac{\omega}{z_1z_2(z_2-z_1)}$ définit sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ une 1-forme logarithmique à pôles le long des 4 droites ci-dessus. Par contre si l'on éclate l'origine, la forme éclatée n'est pas logarithmique le long du diviseur exceptionnel.

Dans leur étude des feuilletages modulaires de Hilbert [MP05], Mendes et Pereira donnent l'exemple d'un feuilletage quadratique de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, non défini par une forme fermée, et possédant une courbe invariante irréductible de degré $S = \deg \mathcal{F} + 3$. Ce feuilletage est "transversalement projectif" et "non transversalement affine". Le lecteur intéressé pourra consulter l'article [LN02] de Lins Neto où l'auteur examine des familles de feuilletages de petit degré sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ ayant des courbes invariantes de degré grand. Dans l'esprit de cet article on peut se demander si un feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ possèdant une courbe invariante de degré "très grand" relativement à celui de $\mathcal{F}$ est transversalement projectif.

Terminons par les remarques suivantes ; si un feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ a une courbe invariante de S de degré précisément $\deg \mathcal{F} + 2$ les singularités de $\mathcal{F}$ sur S étant non dicritiques alors S a au moins 3 composantes irréductibles.

Dans le même ordre d'idée soient $\mathcal{F}$ un feuilletage de degré d sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ et H une hypersurface invariante de $\mathcal{F}$. Si les singularités de H sont de codimension supérieure où égale à 3 alors degré $H \leq d+1$. En effet si ω est une 1-forme homogène définissant $\mathcal{F}$ et h un polynôme homogène irréductible tel que $H = (h = 0)$ alors

$$\omega = a\,dh + h\eta$$

avec $a \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{n+1})$ et $\eta \in \Omega^1(\mathbb{C}^{n+1})$ homogènes ; c'est une conséquence du lemme de division de Rham-Saito. L'identité d'Euler $i_R\omega = 0$, où R désigne le champ radial $R = \sum\limits_{i=0}^{n} z_i \dfrac{\partial}{\partial z_i}$, implique alors que :

$$h\Big((\deg h)a + i_R\eta\Big) = 0$$

en particulier $\deg a \geq 1$ et $\deg H \leq d+1$. Dans le cas extrémal où l'inégalité est une égalité, $\deg H = d+1$, on constate que $\eta = -\delta\, da$ où $\delta = \deg h$, de sorte que h/a^{δ} est une intégrale première rationnelle de $\mathcal{F}$. Notons que dans la carte affine $a = 1$ le feuilletage $\mathcal{F}$ a une intégrale première polynomiale. Remarquons que dans ce cas le feuilletage $\mathcal{F}$ a des singularités dicritiques le long de H.

Une pensée pour Marco Brunella qui s'est beaucoup intéressé à ce type de problèmes. Je tiens à remercier Julie Déserti pour son aide constante et désintéressée.

Références

[BM00] M. Brunella and L. G. Mendes. Bounding the degree of solutions to Pfaff equations. *Publ. Mat.*, 44(2) :593–604, 2000. DOI: 10.5565/PUBLMAT_44200_10

[Bru97] M. Brunella. Some remarks on indices of holomorphic vector fields. *Publ. Mat.*, 41(2) :527–544, 1997. DOI: 10.5565/PUBLMAT_41297_17

[Car94] M. Carnicer. The Poincaré problem in the nondicritical case. *Ann. of Math. (2)*, 140(2) :289–294, 1994.

[CLN91] D. Cerveau and A. Lins Neto. Holomorphic foliations in **C**P(2) having an invariant algebraic curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 41(4) :883–903, 1991. DOI: 10.5802/aif.1278

[CLNS84] C. Camacho, A. Lins Neto, and P. Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *J. Differential Geom.*, 20(1) :143–174, 1984.

[CS82] C. Camacho and P. Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3) :579–595, 1982.

[CM82] D. Cerveau, and J.-F. Mattei. Formes intégrables holomorphes singulières. *Astérisque, 97.* Société Mathématique de France, Paris, 1982. 193 pp.

[Del71] P. Deligne. Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40) :5–57, 1971.

[LN02] A. Lins Neto. Some examples for the Poincaré and Painlevé problems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(2) :231–266, 2002.

[MP05] L. G. Mendes and J. V. Pereira. Hilbert modular foliations on the projective plane. *Comment. Math. Helv.*, 80(2) :243–291, 2005. DOI: 10.4171/CMH/14

Membre de l'Institut Universitaire de France. IRMAR, UMR 6625 du CNRS, Université de Rennes 1, 35042 Rennes, France.

E-mail address: dominique.cerveau@univ-rennes1.fr